Convergence Theorems for Nonlinear Projections in Banach Spaces (Advanced Topics of Information Science and Functional Analysis)

高橋, 渉

数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 49-59

Convergence Theorems for Nonlinear Projections in Banach Spaces

高橋 渉
(Wataru TAKAHASHI)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, C をその空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x\in H$ に対して

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|:\ y\in C\}$$

となるような $z\in C$ が一意に存在する. このことはよく知られた事実である. そこで, $x\in H$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像を P_C で表し, P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする. この距離射影 P_C は, 次の重要な性質を持っている. すなわち, $z=P_Cx$ であることの必要十分条件は

$$(x-z,z-y)\geq 0,\quad \forall y\in C$$

が成り立つことである. この性質を用いると, P_C は非拡大写像, すなわち

$$\|P_Cx-P_Cy\|\leq\|x-y\|,\quad \forall x,y\in H$$

であることがわかる.

Hilbert 空間での距離射影の概念は Banach 空間の場合にも拡張される. E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x\in E$ に対して

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|:\ y\in C\}$$

となるような $z\in C$ は一意に存在するが, $x\in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像をやはり P_C で表し, P_C を E から C の上への距離射影と呼ぶのである.

一方 Mosco[28] は, $\{C_n\}$ を Banach 空間 E の空でない閉凸集合の列とするとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 $s\text{-}\liminf_n C_n$ と弱上極限集合 $w\text{-}\limsup_n C_n$ を

$$x\in s\text{-}\liminf_n C_n \Leftrightarrow \exists\{x_n\}\subset E:\ x_n\in C_n\ (\forall n),\ x_n\to x$$

および

$$x\in w\text{-}\limsup_n C_n \Leftrightarrow \exists\{C_{n_i}\}\subset\{C_n\}:\ x_{n_i}\in C_{n_i},\ x_{n_i}\rightharpoonup x$$

で定義し，$C_0 = s\text{-}\liminf_n C_n = w\text{-}\limsup_n C_n$ であるならば，$\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束するといい，

$$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$$

で表した．ここで，$\to$ は強収束（ノルム収束）を $\rightharpoonup$ は弱収束を表す．狭義凸で回帰的な Banach 空間 E の閉凸集合の列 $\{C_n\}$ の Mosco 収束と距離射影の列 $\{P_{C_n}\}$ の収束との間には大きな関わりがある．塚田 [55] は 1984 年に次の定理を証明した．

定理 A([55]) E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とする．C_0 を $\{C_n\}$ の Mosco 極限とし，$C_0 \neq \phi$ とする．このとき，任意の $x \in E$ に対し

$$P_{C_n}x \rightharpoonup P_{C_0}x$$

である．さらに，E が (H) を満たす（§2 で定義される）ならば，この収束は強収束となる．すなわち，任意の $x \in E$ に対し，$P_{C_n}x \to P_{C_0}x$ となる．

この論文では，Banach 空間における閉凸集合列の Mosco 収束と射影の列の収束について研究する．特に，距離射影とは異なる 2 つの射影を研究し，さらに Banach 空間の空でない閉凸集合の列 $\{C_n\}$ の収束性（Mosco 収束）と射影の収束性の関係について論じる．すなわち，塚田タイプの収束定理が成り立つどうかを議論する．最後の節では，その他の射影と 2 つの問題を提起する．

2 準備

E を Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C 上の写像 T は, 任意の $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ を満たすなら, 非拡大であるといわれる. C 上の写像 T に対して, $F(T)$ は T の不動点の全体を表し, $R(T)$ は T の値域を表す.

Banach 空間 E に対して, E の凸性の modulus δ は, 任意の ε $(0 \leq \varepsilon \leq 2)$ に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1,\ \ \|x-y\| \geq \varepsilon\}$$

で定義される. Banach 空間 E は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してその凸性の modulus が $\delta(\varepsilon) > 0$ であるとき, 一様凸であるといわれる. また, E は $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ となる $x, y \in E$ $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ であるとき, 狭義凸であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は狭義凸である. 狭義凸な Banach 空間では，非拡大写像 T の不動点集合 $F(T)$ は閉凸集合である [45]. E^* を E の共役空間とするとき, E が $E = (E^*)^*$ を満たすなら, E は回帰的であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている.

Banach 空間 E の元 x とその共役空間 E^* の元 x^* に対して, (x, x^*) によって x における x^* の値 $x^*(x)$ を表すとき, E 上の duality 写像 J は, 次のように定義される:

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \quad \forall x \in E.$$

Hahn-Banach の定理を用いることによって, 任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \phi$ であることが証明される. この duality 写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, 任意の $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{$*$}$$

が常に存在するとき, E のノルムは Gâteaux 微分可能であるといわれる. このとき, Banach 空間 E は smooth であるともいわれる. 任意の $y \in U$ に対して極限 $(*)$ が $x \in U$ に対して一様に存在するとき, E のノルムは uniformly Gâteaux 微分可能であるといわれる. 任意の $x \in U$ に対して, 極限 $(*)$ が $y \in U$ に対して一様に存在するとき, E のノルムは Fréchet 微分可能であるといわれる. E が smooth であるなら, duality 写像 J は一価となり, E のノルムが uniformly Gâteaux 微分可能なら, J は E の有界集合上で一様連続である. また, E のノルムが Fréchet 微分可能ならば, J は norm-to-norm 連続である [45].

E を Banach 空間, C をその空でない閉凸集合とするとき, $x \in E$ と $z \in C$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : \ y \in C\} \tag{$**$}$$

となる必要十分条件は, ある $j \in J(x - z)$ が存在し

$$(z - y, j) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

となることが知られている. そこで, E が狭義凸で, 回帰的な Banach 空間とするなら, 任意の $x \in E$ に対して, $(**)$ を満たす $z \in C$ が一意に存在するので, §1 のように $x \in E$ に対して, このような $z \in C$ を対応させる写像を P_C で表し, P_C を距離射影と呼ぶ. すると, 上の同値条件は E から C の上への距離射影 P_C に対して, $z = P_C x$ となる必要十分条件は, ある $j \in J(x - P_C x)$ が存在し

$$(P_C x - y, j) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

となる. さらに E が smooth であるならば E 上の duality 写像 J は一価となるので, 上の不等式は

$$(P_C x - y, J(x - P_C x)) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

となる.

Banach 空間 E が (H) をみたすとは, E での命題

$$x_n \rightharpoonup x, \ \ \|x_n\| \to \|x\| \Rightarrow x_n \to x$$

がつねにいえることである. E が一様凸な Banach 空間のときはこの性質が成り立つ. また [45] から, E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつ必要十分条件は, E が狭義凸で, 回帰的な Banach 空間であり, さらに性質 (H) をもつことである. この事実も Banach 空間の凸性, 微分可能性の議論ではよく用いられる. Banach 空間 E の空でない閉凸集合 C が正規構造をもつとは, 2 点以上を含む C の有界閉凸集合 K に対して, K の点 z が存在し

$$\sup_{y \in K} \|z - y\| < \sup_{x, y \in K} \|x - y\| = \delta(K)$$

となることである．一様凸な Banach 空間の空でない閉凸集合は正規構造をもつし，Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造をもつ [45]．次の定理は Kirk[20] によって証明された．

定理 2.1([20]) E を回帰的な Banach 空間とし，E は正規構造をもつとする．C を E の有界閉凸集合とし，T を C から C への非拡大写像とする．このとき，T は C の中に不動点をもつ．

3 サニー非拡大射影と Mosco 収束

E を Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸部分集合とする．このとき，E から C 上への写像 P がサニーであるとは，任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

が成り立つことである．また，E から C 上への写像 P が射影であるとは，任意の $x \in C$ に対して，$Px = x$ が成り立つことである．[4, 31] から，E が滑らかな Banach 空間とするとき，E から C 上への射影 P がサニー非拡大であることと

$$(x - Px, J(Px - y)) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

が成り立つことは同値である．ここで，J は E から E^* への duality 写像である．E が滑らかな Banach 空間では，E から C 上へのサニー非拡大射影は一意に決まる．実際，Q を E から C 上へのもう 1 つのサニー非拡大射影とする．このとき

$$(x - Qx, J(Qx - y)) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

が成り立つ．任意の $x \in E$ に対して，Px，$Qx \in C$ であることから

$$(x - Qx, J(Qx - Px)) \geq 0, \quad (x - Px, J(Px - Qx)) \geq 0$$

が成り立つ．この 2 つの不等式から

$$(Px - Qx, J(Qx - Px)) \geq 0$$

が得られ，$-\|Px - Qx\|^2 \geq 0$ を得る．よって $Px = Qx$ である．ゆえに E から C 上へのサニー非拡大射影は一意に決まる．そこで，我々は E が滑らかな Banach 空間の場合に，E から C 上へのサニー非拡大射影を Q_C で表すことにする．C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，C が非拡大レトラクト（サニー非拡大レトラクト）であるとは，E から C 上への非拡大射影（サニー非拡大射影）が存在するときをいう．Bruck[5, 6] は非拡大レトラクトに関して次の定理を得た．

定理 3.1([5, 6]) E を回帰的な Banach 空間とし，正規構造をもつものとする．T を E から E への非拡大射影とし，$F(T) \neq \phi$ とする．このとき，$F(T)$ は非拡大レトラクトである．

さらに，Reich[33]，高橋–上田 [53] はサニー非拡大レトラクトに関して次の定理を得た．

定理 3.2([33, 53]) E を回帰的な Banach 空間とし，一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつとする．さらに，E は正規構造をもつものとする．T を E から E への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．このとき，$F(T)$ はサニー非拡大レトラクトである．

高橋–上田 [53] はサニー非拡大射影の存在に関してもっと詳しい定理を導いた．

定理 3.3([53]) E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする．T を E から E への非拡大写像とし，$x \in E$ とする．このとき，$0 < t < 1$ となる任意の t に対して

$$z_t = tx + (1-t)Tz_t$$

を満たす元 z_t が一意に存在し，$t \to 0$ とするならば，$\{z_t\}$ は Qx に強収束する．ただし，Q は E から $F(T)$ の上へのサニー非拡大射影である．

以上のような準備のもとで，木村–高橋 [19] は次の定理を得た．

定理 3.4([19]) E を回帰的な Banach 空間とし，$\{C_n\}$ を E の空でない閉凸非拡大レトラクトの列とする．もし，$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在し，$C_0 \neq \phi$ とするならば，C_0 は閉凸非拡大レトラクトである．

定理 3.5([19]) E を回帰的な Banach 空間とし，一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつとする．また，E は正規構造をもつものとし，$C_1, C_2, C_3, \ldots$ を空でない閉凸なサニー非拡大レトラクトの列で，$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在するものとする．このとき，$C_0 \neq \phi$ ならば，C_0 は閉凸なサニー非拡大レトラクトである．さらに，E の duality 写像 J が weakly sequentially continuous であるならば，任意の $x \in E$ に対して

$$Q_{C_n}x \to Q_{C_0}x$$

である．

4 ϕ-射影と Mosco 収束

E を滑らかな Banach 空間とし，J を E から E^* への duality 写像とする．このとき，

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2(x, Jy) + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E$$

で $E \times E$ から $\boldsymbol{R}$ への関数 ϕ を定義する．この関数 ϕ は次のような性質をもつ．

(i) 任意の $x \in E$ に対して，E から $\boldsymbol{R}$ への関数

$$y \mapsto \phi(y,x) = \|y\|^2 - 2(y, Jx) + \|x\|^2$$

は凸で連続である;

(ii) 任意の $x \in E$ に対して

$$\|x_n\| \to \infty \Rightarrow \phi(x_n, x) \to \infty$$

である.

E は滑らかな狭義凸, 回帰的な Banach 空間であるとする. また, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して

$$\phi(z, x) = \min\{\phi(y, x) : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する ([1] を参照). そこで, $x \in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像を R_C で表し, R_C を E から C の上への ϕ-射影, または generalized projection と呼ぶことにする. Hilbert 空間では, generalized projection R_C と距離射影 P_C は一致する.

E を滑らかな Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. また, $x \in E$, $z \in C$ とし, J を E 上への duality 写像とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) $\phi(z, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$;

(2) $(z - y, Jx - Jz) \geq 0, \quad \forall y \in C$.

茨城–木村–高橋 [15] は次の定理を得た.

定理 4.1([15]) E を滑らかで, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とし, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない閉凸集合の列とする. もし $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \phi$ とするならば, 任意の $x \in E$ に対して

$$R_{C_n} x \rightharpoonup R_{C_0} x$$

である. ただし, R_C は E から C の上への generalized projection である.

さらに茨城–木村–高橋 [15] は次の収束定理を得た.

定理 4.2([15]) E を滑らかな Banach 空間とし, E^* は Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする. また $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない閉凸集合の列とする. もし $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \phi$ ならば, 任意の $x \in E$ に対して

$$R_{C_n} x \to R_{C_0} x$$

である.

次の定理は，$\{C_n\}$ の Mosco 収束がいえるための十分条件を示すものである．

定理 4.3([15]) E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とし，Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする．$C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない閉凸集合の列とし，

$$\lim_n R_{C_n} x = R_{C_0} x, \quad \forall x \in E$$

とする．このとき，$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ である．

5 その他の射影と問題点

これまでは，Banach 空間の空でない閉凸集合の列が Mosco 収束することと，Banach 空間の 3 つの射影（距離射影，サニー非拡大射影，ϕ-射影）の収束性が議論された．

ここで，3 つの射影を再度復習してみようと思う．比較しやすいように E を滑らかな Banach 空間とする．また，C を E の空でない閉凸集合とし，P_C, Q_C, R_C を E から C 上への距離射影，サニー非拡大射影，ϕ-射影とする．このとき，$x \in E$，$z \in C$ に対して

$$\begin{aligned} z = P_C x &\Leftrightarrow (z - y, J(x - z)) \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z = Q_C x &\Leftrightarrow (x - z, J(z - y)) \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z = R_C x &\Leftrightarrow (x - z, Jz - Jy) \geq 0, \quad \forall y \in C \end{aligned}$$

である．ただし，J は E 上の duality 写像である．

これらの考察から

$$z = S_C x \Leftrightarrow (z - y, Jx - Jz) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

となる S_C の存在が容易にわかるであろう．果たしてこのような射影 S_C はどのようなときに現れ，どのようなものか非常に興味のあることである．

また，非線形エルゴード理論の分野では次のような射影の存在がわかっている．

定理 5.1([12]) E を一様凸な Banach 空間とする．T を E から E への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．このとき，E から $F(T)$ の上への非拡大射影 P で，$PT = TP = P$ を満たし，かつ

$$Tx \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : \ n = 0, 1, 2, \ldots\}, \quad \forall x \in E$$

となるものが存在する．

このような射影 P を高橋 [42] はエルゴード射影と呼んだ．Banach 空間でのこのような P の一意性は Bruck[8] によって以下のような形で得られた．

定理 5.2([8]) 一様凸な Banach 空間で，Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする．T を E から E への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．このとき，E から $F(T)$ の上への非拡大射影 P で，$PT = TP = P$ を満たし，かつ

$$Tx \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x:\ n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \forall x \in E$$

となるものが一意に存在する．

この定理は，可換なセミグループに対しては平野–木戸–高橋 [11, 12] によって，非可換の場合は Lau–西浦–高橋 [22] によって得られている．以上のような考察から，次の問題が提起される．

問題 E を一様凸な Banach 空間とし，Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする．$T_1, T_2, T_3, \dots$ を E から E への非拡大写像の列とし，$F(T_1), F(T_2), F(T_3), \dots$ を $T_1, T_2, T_3, \dots$ の不動点集合の列とする．$P_1, P_2, P_3, \dots$ を E から $F(T_1), F(T_2), F(T_3), \dots$ の上へのエルゴード射影の列とする．このとき，$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在し，$C_0 \neq \phi$ とするなら，C_0 は E のサニー非拡大レトラクトであるが，どんな条件のもとで，エルゴード射影の収束がいえるのか．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: Properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 178, Dekker, New York, 1996, pp.15-50.

[2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[3] B. Brosowski, F. Deutsch, and G. Nurnberger, *Parametric approximation*, J. Approx. Theory, 29 (1980), 261-277.

[4] R. E. Bruck, *Nonexpansive retracts of Banach spaces*, Bull. Amer. Math.Soc., 76 (1970), 384-386.

[5] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), 251-262.

[6] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 53 (1974), 59-71.

[7] R. E. Bruck, *On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mapping on Hilbert space and the structure of the ω-limit set*, Israel J. Math., 29 (1978), 1-16.

[8] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.

[9] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected topics*, Lecture Notes in Mathematics, 485, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[10] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *The existence of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan, 38 (1986), 1-7.

[11] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229-249.

[12] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.

[13] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space*, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.

[14] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in Banach space*, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.

[15] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operators in Banach spaces*, Abst. Appl. Math., 2003 (2003), 621-629.

[16] O. Kada and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems of almost nonexpansive curves for commutative semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 305-324.

[17] O. Kada and W. Takahashi, *Strong convergence and nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis, 28 (1997), 495-511.

[18] O. Kada, A. T. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis, 29 (1997), 539-550.

[19] Y. Kimura and W. Takahashi, *Strong convergence of sunny nonexpansive retractions in Banach spaces*, PanAmer. Math. J., 9 (1999), 1-6.

[20] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.

[21] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Analysis, 2 (1993), 333-342.

[22] A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals*, Nonlinear Analysis, 26 (1996), 1411-1427.

[23] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Functional Analysis, 161 (1999) 62-75.

[24] A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 126 (1987), 277-294.

[25] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 39-57.

[26] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant submeans and semigroups of nonexpansive mappings on Banach spaces with normal structure*, J. Functional Analysis. 142 (1996), 79-88.

[27] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69-80.

[28] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math., 3 (1969), 510-585.

[29] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 591-597.

[30] R. R. Phelps, *Convex sets and nearest points*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 790-797.

[31] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 44 (1973), 57-70.

[32] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 67 (1979), 274-276.

[33] S. Reich, *Strong convergence theorem for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 287-292.

[34] S. Reich, *A limit theorem for projections*, Linear and Multilinear Algebra, 13(1983), 281-290.

[35] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172-178.

[36] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 211 (1997), 71-83.

[37] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3641-3645.

[38] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., 34 (1998), 87-99.

[39] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., 1 (2000), 73-87.

[40] W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroups of non-expansive mappings*, Kōdai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 383-386.

[41] W. Takahashi, *Recent results in fixed point theory*, SEA Bull. Math., 4 (1981), 59-85.

[42] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[43] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan., 36 (1984), 543-553.

[44] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55-58.

[45] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988.

[46] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Can. J. Math., 44 (1992), 880-887.

[47] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Analysis, 30 (1997), 1283-1293.

[48] W. Takahashi and D. H. Jeong, *Fixed Point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 1175-1179.

[49] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica, 48 (1998), 1-9.

[50] W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost orbits of commutative semigroups in Banach spaces*, in Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, Eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York, 1987, 271-293.

[51] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approximation Theory, 91 (1997), 386-397.

[52] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, 5 (1998), 45-56.

[53] W. Takahashi and Y. Ueda, *On strong convergence theorem for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 546-553.

[54] M. Tsukada, *Convergence of closed convex sets and σ-fields*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 62 (1983), 137-146.

[55] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory, 40 (1984), 301-309.

[56] T. Tsuzuki, *Convergence of closed convex sets and sunny nonexpansive retractions in Banach spaces*, Master's Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1995 (Japanese).